Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Nombre: ______________________________

Carné: ______________ Sección: _____

MA-2112 Abril-Julio 2011

1^er Examen Parcial (50 %) **Tipo A**

Justifique todas sus respuestas.

1. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

a) ¿Es f continua en $(0, 0)$?

Queremos ver que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = f(0, 0)$, es decir $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{|xy|} = 0$. Usando $\epsilon - \delta$, se tiene, tomando $\delta = \epsilon$: $|\sqrt{|xy|}| = |\sqrt{|x|}||\sqrt{|y|}| < \delta^{\frac{1}{2}}\delta^{\frac{1}{2}} = \delta = \epsilon$

b) Diga si existe la derivada de f en la dirección del vector $(1, 1)$ en el punto $(0, 0)$.

Queremos ver si existe $\lim_{h\to 0} \frac{f((0,0) + h(1,1)) - f(0,0)}{h}$. Nos queda:
$\lim_{h\to 0} \frac{f((h,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{|h^2|}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} = \pm 1$. Así el límite no existe, y f no tiene derivada direccional en $(0, 0)$ en la dirección del vector $(1, 1)$.

c) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$?

Si f fuera diferenciable en $(0, 0)$, todas las derivadas direccionales deberian existir, pero por la parte (b), esto no es cierto. Por lo tanto f no es diferenciable en $(0, 0)$.

(13 puntos)

2. Sea $z = f(x, y)$, dada implicitamente por la ecuación $xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 20$. Halle la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $(1, 2, 3)$.

Primero calculamos $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$yz + xyz_x + 2x + 2zz_x = 0 \Rightarrow z_x = \frac{-(yz + 2x)}{xy + 2z}$$

$$xz + xyz_y + 2y + 2zz_y = 0 \Rightarrow z_y = \frac{-(xz + 2y)}{xy + 2z}$$

Que en el punto $(1, 2, 3)$ nos da $\frac{\partial z}{\partial x}(1, 2, 3) = -1$ y $\frac{\partial z}{\partial y}(1, 2, 3) = -\frac{7}{8}$. Asi la ecuación del plano tangente queda:

$$z = 3 + \frac{\partial z}{\partial y}(1, 2, 3)(x - 1) + \frac{\partial z}{\partial x}(1, 2, 3)(y - 2) \Rightarrow z = 3 - (x - 1) - \frac{7}{8}(y - 2) \Rightarrow 8x + 7y + 8z = 46$$

Otra forma de hacerlo:

Consideramos $F(x, y, z) = xyz + x^2 + y^2 + z^2$, y la superficie $S = N_{20}(F)$, el conjunto de nivel 20 para F. La ecuación del plano tangente está dada por

$$\nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Tenemos $\nabla F(x, y, z) = (yz + 2x, xz + 2y, xy + 2z)$. Entonces en el punto $(1, 2, 3)$ nos queda:

$$(8, 7, 8) \cdot (x - 1, y - 2, z - 3) = 0 \Rightarrow 8(x - 1) + 7(y - 2) + 8(z - 3) = 0 \Rightarrow 8x + 7y + 8z = 46$$

(12 puntos)

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y $z = f(\frac{x+y}{x-y})$ para $x - y \neq 0$. Pruebe que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

Haciendo $g(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$ nos queda:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial x} = f'(g(x, y))\frac{(x - y) - (x + y)}{(x - y)^2} = f'(g(x, y))\frac{-2y}{(x - y)^2}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = f'(g(x, y))\frac{\partial g}{\partial y} = f'(g(x, y))\frac{(x - y) + (x + y)}{(x - y)^2} = f'(g(x, y))\frac{2x}{(x - y)^2}$$

Así:

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} = xf'(g(x, y))\frac{-2y}{(x - y)^2}+yf'(g(x, y))\frac{2x}{(x - y)^2} = f'(g(x, y))\left(\frac{-2xy}{(x - y)^2} + \frac{2xy}{(x - y)^2}\right) = 0$$

(12 puntos)

4. Halle los valores extremos de $f(x, y, z) = 3x+y+2z$ en la intersección de $y^2+z^2 = 2$ y $x+z = 1$.

Como f es continua y el conjunto sobre el que trabajamos es cerrado y acotado (pues es la intersección de un cilindro con un plano no paralelo al eje del primero, lo que da una curva cerrada), entonces f alcanza sus valores extremos. El método de multiplicadores de Lagrange nos dará los puntos donde se alcanzan estos valores. Tomando $g(x, y, z) = y^2 + z^2$ y $h(x, y, z) = x + z$, tenemos que existen λ y μ tales que:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda\nabla g(x, y, z) + \mu\nabla h(x, y, z)$$

Así:

$$(3, 1, 2) = \lambda(0, 2y, 2z) + \mu(1, 0, 1)$$

lo que nos da:

$$\begin{array}{rclcccc} 3 & = & \mu & & & & \\ 1 & = & 2\lambda y & \Rightarrow & 2\lambda y = -2\lambda z & (*) & \\ 2 & = & 2\lambda z + \mu & = & 2\lambda z + 3 & \Rightarrow & 2\lambda z = -1 \end{array}$$

y por $(*)$, $\lambda = 0$ o $y = -z$. Pero por la segunda ecuación $\lambda \neq 0$. Por lo tanto $y = -z$, y como $y^2 + z^2 = 2$, nos queda $y = \pm 1$, de donde $z = \mp 1$ y entonces $x = 0$ o $x = 2$. Así, los puntos donde se alcanzan los valores extremos son $(0, -1, 1)$ y $(2, 1, -1)$, y los valores extremos son:
$f(0, -1, 1) = 1$ mínimo global, $f(2, 1, -1) = 5$ máximo global.

(13 puntos)